



TITLE:

Coupled Mode Theory and The Gap Soliton (Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics)

AUTHOR(S):

飯塚, 剛

CITATION:

飯塚, 剛. Coupled Mode Theory and The Gap Soliton (Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics). 数理解析研究所講究録 2002, 1247: 23-33

ISSUE DATE:

2002-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/41734>

RIGHT:

Coupled Mode Theory and The Gap Soliton

Takeshi IIZUKA Dept. Physics Ehime University

飯塚剛 愛媛大理物理

11/July/2001 RIMS Kyoto Univ. (研究集会:流体と気体の数学解析)

Abstract

The coupled theory and the concept of gap solitons are reviewed. First, basic idea of the gaps in the Schrödinger equation is briefly considered. Next, we show how the appearance of the nonlinearity in fiber grating leads the coupled mode theory and the gap soliton. Third section is devoted to an application to deep water waves.

1 Introduction

周期構造を持つ媒質中の波動において、ギャップと呼ばれる振動数の禁制帯が現れることは、極めて一般的に成立する事実である。古くは、量子力学誕生直後のブロッホ波動関数 [1] の発見がある。つまり、一体シュレディンガー方程式のポテンシャルが周期性を持つ場合、単調波を拡張した型の解が存在し、対応する分散関係を調べると波数 $k = \pi/d$ (d は系の周期) でギャップがある。これは後の固体物理学におけるバンド理論の基礎となる。

1980年代に入ると、光ファイバーに対して人工的に周期構造を与えて、光波に対する禁制帯、つまりギャップが見いだされている [2]。これは、工学的にはビーム分離、ビーム圧縮、光回路素子など応用は幅広い。また、最近では光ファイバーに限らず、半導体や高分子を用いた層状超格子や、2次元構造を持つフォトニック結晶など様々な周期構造が実現している。

光の波動が固体中の電子波と大きく異なるのは、非線形効果が存在することである。Schrödinger 方程式は線形であるが、Maxwell 方程式では媒質によっては光カー効果、ラマン散乱などによる非線形効果が出現する可能性がある。非線形効果の顕著な例として光ファイバーにおけるソリトン現象 [2] が知られている。これは、分散性と非線形性のバランスにより実現される極めて安定的なパルスであり、1984年に実験検証されて以来、最近では数万キロの伝送も可能になっている。

それでは、周期構造のある系に対して非線形効果が加わったらなにが起こるのであろうか？その一つの解析手段が、結合モード理論 (Coupled Mode Theory) である。これは、後で詳しく述べるが、ブラッグ反射しあう二つの逆方向の波の非線形結合と、ブラッグ共鳴を同時に扱うもので、禁制帯振動数付近での光の振る舞いを調べるものである。結合モード方程式の一つの解として、局在型のソリトン解がある。驚くべきことにこの解は、線形波動では許されないギャップ内振動数が許される。これは、ギャップソリトンと呼ばれ 1980 年頃に理論的予想され [3] 1996 年になって実験的に証明された [4]。

ギャップソリトン現象は光に限ったことでなく、周期構造をもつ非線形波動系であるなら広い範囲で成立することが容易に想像できる。例えば、質量が周期的に変化する非線形格子、同じく非線形 LC 電気回路がある。いずれの場合も、結合モード方程式あるいはそれらを拡張したモデルに帰着させることができる。代表的な非線形波動である深水水面波を取り上げることが、本論文の一つの目的である。

本論文の構成は以下の通り。まず、Schrödinger 方程式をモデルとして、禁制帯ギャップの出現するメカニズムを摂動論的に説明する。問題は 1 次元に限定してあるが、現実

の固体である3次元でも議論の本質は変わらない。次に、光の波を記述する Maxwell 方程式から出発して、非線形効果を取り入れた結合モード理論を review する。この際、特殊解としてギャブソリトンを導出する。最後に、水面波を解析する。周期構造として、固定水底の一次元的変動を取り上げる。水面波は光に比べ方程式が複雑に絡んでいるが、最終的に結合型方程式を拡張した形の方程式が得られる。

2 周期系におけるギャブ

ギャブ現象は様々な波動系でみられるが、ここでは最もよく知られている量子力学系を取り上げる。簡単のために1次元系の摂動論のみ取り上げるが、禁制帯出現のメカニズムの本質を示すには十分であろう。出発となるのは以下に示す、定常的 Schrödinger 方程式である。これは Strum-Liouville 型の固有値問題となっている

$$-\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + u(x)\phi(x) = \omega\phi(x), \quad (1)$$

x は空間を示す独立変数であり、 $\phi(x)$ は定常状態電子の波動関数を表す。固有値 ω は電子のエネルギー（に比例している量）であり、ポテンシャル $u(x)$ によって離散的にあるいは連続的に分布する。ここでは、 $u(x)$ は周期的に変化していると仮定する。

$$u(x+d) = u(x) \quad (2)$$

この場合、Schrödinger 方程式 (1) はブロッホ波動関数とよばれる1-パラメータ基本解を持つことが知られている [5]。このパラメータ (k とする) は波数と呼ばれて、次の関係式を満たす。

$$\phi_k(x+d) = \phi_k(x)e^{ikd}, \quad (3)$$

ただし $i = \sqrt{-1}$ 。これは、単調波 e^{ikx} の一般型をなしている。エネルギー ω は、波数 k によって与えられてこの関係 $\omega = \omega(k)$ は分散関係と呼ばれている。

まず、ポテンシャルがない自由空間 $u(x) \equiv 0$ においては、解は明らかに単調波 $\phi(x) = e^{ikx}$ となり、直ちに分散関係 $\omega = k^2$ が導かれ、連続的な放物線となってる。さて、ここで周期ポテンシャル $u(x)$ は十分小さいとして摂動論を展開する。まず、周期ポテンシャルを Fourier 展開しておく。

$$u(x) = \sum_{n \neq 0} u_n e^{2i\pi nx/d} \quad (4)$$

次に、波動関数 $u(x)$ については平面波からの最低次の補正を考え、以下のように Fourier 展開する。

$$\phi(x) = \phi_k(x) = \phi_0 e^{ikx} + \sum_{n \neq 0} \phi_n e^{i(k+2\pi n/d)x} \quad (5)$$

こうしておく、 $\phi(x)$ はブロッホ波動関数の条件式 (3) を満たす。展開 (4), (5) を Schrödinger 方程式 (1) に代入して、 u_n と ϕ_n の1次の項のみを取り出すと、係数 ϕ_n が直ちに求まる。

$$\phi_n = \frac{\phi_0 u_n}{k^2 - (k + 2\pi n/d)^2} = \frac{\phi_0 u_n}{4(k + n\pi/d)n\pi/d}, \quad (n \neq 0) \quad (6)$$

こうして、最低次の近似解を求めることができたが、上の式で注意しなければならないことがある。本来なら ϕ_n は微小量なのであるが、「たまたま」 k が π/d の整数倍 $k = m\pi/d$ に選ばれたとしたら、ある ϕ_{-m} が発散してしまう。つまり摂動論が役に立たなくなる。これは、整数倍付近の値 $k \simeq \pi/d$ でも同様である。とくに $m = 1$ の場合 $k = \pi/d \equiv k_B$ はブラッグ波数と呼ばれ、物理的に重要である。ここでも $k \simeq k_B$ と ($m = 1$) 仮定する。こうした場合の処方として、発散する Fourier 成分 $\phi_{-1}e^{-ikx}$ も、摂動 0 次の reference 解として取り込む。つまり、(5) の代わりに、 $n = -1$ 成分を摂動部からはずし次のように与える。

$$\begin{aligned}\phi_k(x) &= \phi_0 e^{ikx} + \phi_{-1} e^{i(k-2\pi/d)x} + \sum_{n \neq 0, -1} \phi_n e^{i(k+2\pi n/d)x}, \\ &= \left(\phi_0 e^{ik_B x} + \phi_{-1} e^{-ik_B x} + \sum_{n \neq 0, -1} \phi_n e^{i(1+2n)k_B x} \right) e^{iKx}\end{aligned}\quad (7)$$

ϕ_0, ϕ_{-1} は定数である。ここで、 $k \simeq k_B = \pi/d$ なので、 $k = k_B + K$ (ただし K は微小) として、2 番目の書き換えをした。また、固有値も微小量 Ω を導入して $\omega = k_B^2 + \Omega$ とする。(7) をシュレディンガー方程式に代入して、微小量 u_n, ϕ_n, Ω に関する最低次のみを考慮すると、以下の式が得られる。

$$\phi_n = -\frac{u_n \phi_0 + u_{n+1} \phi_{-1}}{4n(n+1)}, \quad (n \neq 0, -1) \quad (8)$$

$$(+K^2 + 2k_B K - \Omega) \phi_0 + u_1 \phi_{-1} = 0, \quad (9)$$

$$(-K^2 - 2k_B K - \Omega) \phi_{-1} + u_{-1} \phi_0 = 0, \quad (10)$$

(8) は (6) に相当する式であるが、今の場合は発散する心配はない。また、(9), (10) から ϕ_0, ϕ_{-1} の可解条件より、ローカルな分散関係

$$\Omega(K) = \pm \sqrt{(2k_B K + K^2)^2 + |u_1|^2} \quad (11)$$

を得る。ただし $u_{-n} = u_n^*$ であることに注意。 k が k_B から離れる、つまり K が十分大きいとすると $\Omega \simeq K^2 + 2k_B K$ となり本来の放物線 $\omega = k^2$ に漸近していくことがわかる。

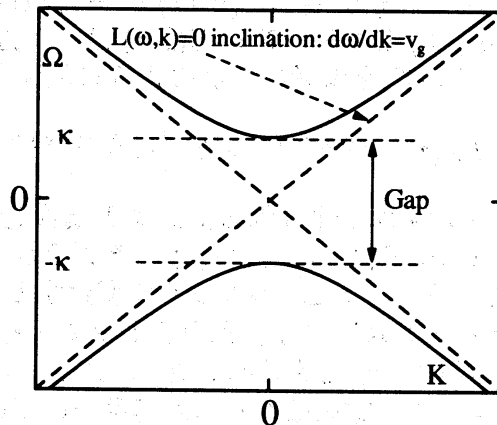


Figure 1:

ここで、figure1 から明らかなように、分散式 (11) は $\Omega < |u_1| \equiv \kappa$ なる値を許さない。つまり $k_B^2 - |u_1| < \omega < k_B^2 + |u_1|$ なる範囲は振動数 ω の禁制帯つまりギャップと

なっている。同様なことが、 $k = \pm 2k_B, \pm 3k_B, \dots$ 付近でも成立しており、全体として ω はバンド構造をなしている。

このギャップの出現は、以上の摂動論的解析 (7) からわかる通り 2 つの波 $\phi_0 e^{ik_B x}$ 前進波と $\phi_{-1} e^{-ik_B x}$ 後退波が、周期構造のフーリエ成分 $u_{\pm 1}$ を通して相互作用を起こしていることに、起因している。これは、通常ブラック共鳴と呼ばれ、X 解析でもちいるブラッグ散乱の特殊な場合といえる。Strum-Liouville 型の方程式 (1) は、電磁気波、格子系など広いクラスの物理系で見いだされており、ギャップという概念は量子系に限らず、周期的な系の多くの場合に見いだされる概念だと考えられる。

3 Coupled Mode Theory

3.1 モデル方程式

ここでは、2 番目の物理系の例として非線形媒質における光を取り上げる。量子力学の基本方程式はたまたま線形であったが、多くの古典波動系は非線形性を内在するので解析が難解になる。しかし、前セクションのでみてきたように前進波と後退波の共鳴という立場で少なくとも方程式のモデル化ということはできる。これが、結合モード理論である。特に optical grating と呼ばれる、周期性を持つ光ファイバーは多くの研究者が、理論、実験、応用といった様々な立場で研究しているので、ここでも取り上げることにする。系を支配する基礎方程式 Maxwell を多少簡単にすると以下が導かれる。

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\chi^{(1)}(x)E + \chi^{(3)}E^3), \quad (12)$$

$$\chi^{(1)}(x) = \sum_n \chi_n e^{\frac{2i\pi n}{d}x}, \quad (n \cdots \text{integer} \quad \chi_{-n} = \chi_n^*) \quad (13)$$

ここで c は真空光速、 $\chi^{(3)}$ は非線形性を示す定数である。線形の誘電率 $\chi^{(1)}(x)$ は、ファイバー方向 x に周期的に変化しているので、Fourier 展開の形に書いた。(ただし周期は d) ここで対象となるファイバー格子は、レーザーの干渉パターンを照射することにより作成できる [2]。我々はここで、誘電率の周期的変動が十分小さいという現実にも合致する仮定を設ける。つまり χ_0 は $\chi^{(1)}(x)$ の平均値的な量と考えられるので、 $\langle \chi^{(1)}(z) \rangle \equiv \chi_0 = 1 \gg \chi_n (n \neq 0)$ とする。 $E = E(x, t)$ は進行方向 x と垂直に向いている電場を表している。 $E(x, t)$ は (7) を参考に、次のように展開する。

$$E(x, t) = E_+(x, t)e^{i(k_B x - \omega t)} + E_-(x, t)e^{i(-k_B x - \omega t)} + c.c., \quad (14)$$

ここで $k_B \equiv \pi/d$ はブラッグ波数と呼ばれる。 ω は周期構造がないときの振動数値つまり、 $\omega = ck_B$ で定義される。 $E_+(x, t), E_-(x, t)$ はそれぞれ前進波 $e^{i(k_B x - \omega t)}$ と後退波 $e^{i(-k_B x - \omega t)}$ の包絡線を表しており、 x と t のゆっくり変化する未知関数である。(7) でいえば $\phi_0 e^{ik_B x}$, $\phi_{-1} e^{-ik_B x}$ にそれぞれ対応する。前セクションで扱った、他の高次のフーリエ成分は結局 (8) のように解けて [6] におかつ、 E_{\pm} のダイナミクスに影響を与えないので、ここでは (14) から省いた。電場はもちろん実数なので複素共役量 $c.c.$ が加えてある。本来 $\chi^{(1)}E$ は時間の遅延効果をあらわす、積分形式で表される。これが物質固有の分散性を生み出すのであるが、ここでは周期性による分散性の方が十分大きいとして遅延効果は考えないことにした。仮に考慮したとしても以下の解析にはほとんど影響を与えない。

展開 (14) を方程式 (12) に代入して、包絡の高階微分を無視して $e^{i(\pm k_B x - \omega t)}$ の係数を比較することによって、以下の2本の式が導かれる。

$$i \left(\frac{1}{v_g} \frac{\partial E_+}{\partial t} + \frac{\partial E_+}{\partial x} \right) + \kappa E_- + a(|E_+|^2 + 2|E_-|^2)E_+ = 0, \quad (15)$$

$$i \left(\frac{1}{v_g} \frac{\partial E_-}{\partial t} - \frac{\partial E_-}{\partial x} \right) + \kappa E_+ + a(|E_-|^2 + 2|E_+|^2)E_- = 0, \quad (16)$$

ただし、 $v_g = c$, $\kappa = \chi_1 k_B / 4$ and $a = 3\chi^{(3)} k_B / 2$ と定義されている。 χ_1 は一般性を失わずに、実数と仮定した。これは、前進波 E_+ と後進波 E_- がブラッグ共鳴と非線形効果という2つの方法で相互作用を行うことを示す式で、結合モード方程式と呼ばれており、光 grating (格子) における標準モデルと考えられている。

ここで、非線形性を無視して $E_{\pm} = \phi_{\pm} \exp i(Kx - \Omega v_g t)$, と仮定してすると (11) と同様の局所的な分散関係

$$\Omega = \pm \sqrt{K^2 + \kappa^2}, \quad (17)$$

が導かれ、Figure 1 で示したような、ギャップが $|\Omega| < |\kappa|$ にできる。

結合モード方程式 (15), (16) は可積分のモデルではないので、逆散乱法や双線形法などの解析手段は存在しない。しかし、以下の3つの積分 (不変量) を持つことが証明できる。

$$\begin{aligned} N &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (|E_+|^2 + |E_-|^2) dx, \dots \text{total power} \\ P &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i} \left(E_+ \frac{\partial E_+^*}{\partial x} + E_- \frac{\partial E_-^*}{\partial x} \right) dx, \dots \text{total momentum} \\ H &= v_g \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{i}{2} \left(E_+ \frac{\partial E_+^*}{\partial x} - E_- \frac{\partial E_-^*}{\partial x} \right) + \kappa E_+^* E_- + a \left(\frac{|E_-|^2 + |E_+|^2}{4} + |E_+ E_-|^2 \right) \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} dx \quad \dots \text{Hamiltonian (total energy)} \end{aligned}$$

ハミルトニアン H を用いることにより、結合モード方程式は正準形式にかける。

$$\frac{\partial E_{\pm}}{\partial t} = i \frac{\delta H}{\delta E_{\pm}^*}, \quad \frac{\partial E_{\pm}^*}{\partial t} = -i \frac{\delta H}{\delta E_{\pm}}$$

また、総パワー N と総運動量 P の保存則は以下のようにかける。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} + \frac{\partial v_g (|E_+|^2 - |E_-|^2)}{\partial x} &= 0, \quad (\text{power flow}) \\ \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} &= 0. \quad (\text{momentum flow}) \end{aligned} \quad (18)$$

3.2 Gap Soliton

次に、結合モード方程式 (15), (16) の局在した進行波解を求める [3]。そのためにまず、

$$E_{\pm}(x, t) = \Delta^{\pm \frac{1}{2}} \sqrt{F(\zeta)} e^{i(\theta_{\pm}(\zeta) - v_g \Omega t)}, \quad (19)$$

$$\zeta = x - Vt, \quad (20)$$

とおく。 V は進行速度、 Ω は振動数を表す。これを、結合モード方程式にいて、それぞれの虚部、実部から計4つの式がでてくる。虚部の2つより、

$$\Delta = \sqrt{\frac{v_g + V}{v_g - V}} \quad (21)$$

でなければならないことがわる。また、 $\phi(\zeta) = \theta_+ - \theta_-$ とすると、 ϕ と F のみの方程式、

$$\frac{d\phi}{d\zeta} = 2\gamma^2\Omega + 2\gamma\kappa \cos \phi + 2\gamma(1 + 2\gamma^2)F, \quad (22)$$

$$\frac{dF}{d\zeta} = 2\kappa\gamma F \sin \phi, \quad (23)$$

および、

$$\frac{d}{d\zeta}(\theta_+ + \theta_-) = 2\gamma^2 \frac{V}{v_g}(\Omega + 2\gamma F), \quad (24)$$

が得られる。ただし定数 γ はローレンツ因子と呼ばれ、

$$\gamma \equiv \left(1 - \frac{V}{v_g}\right)^{-1/2} \geq 1 \quad (25)$$

で定義される。連立常微分方程式(22),(23)は

$$I(F, \phi) = 2\gamma^2\Omega F + 2\gamma\kappa F \cos \phi + \gamma(1 + 2\gamma^2)F^2, \quad (26)$$

なる保存量がある($dI/d\zeta = 0$)。特に局在解の場合は $F(\pm\infty) = 0$ であるので、 $I = 0$ としてよい。すると、(22)は ϕ のみの式

$$\frac{d\phi}{d\zeta} = -2\gamma^2\Omega - 2\gamma\kappa \cos \phi, \quad (27)$$

に帰着することができる。(22)は積分が実行可能で $\phi(\zeta)$ は厳密に表すことができる。従って、 $F(\zeta)$ も $I(F, \phi) = 0$ より求まり、さらに(24)を組み合わせることにより $\theta_{\pm}(\zeta)$ が得られる。以上結果だけを示すと、

$$F(\zeta) = \frac{2(\kappa^2 - \gamma^2\Omega^2)(1 + 2\gamma^2)^{-1}}{\kappa \cosh(2\sqrt{(\kappa^2 - \gamma^2\Omega^2)\gamma\zeta}) + \gamma\Omega},$$

$$\theta_{\pm}(\zeta) = \frac{\gamma^2 V \Omega}{v_g} \zeta - \left(\frac{4\gamma^2 V}{(1 + 2\gamma^2)v_g} \pm 1 \right) \arctan \left(\sqrt{\frac{\kappa + \gamma\Omega}{\kappa - \gamma\Omega}} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\kappa^2 - \gamma^2\Omega^2} \gamma\zeta \right) \right).$$

となる。ここで Δ は実数と仮定したので(21)より $|\Omega| < \kappa\gamma^{-1}$ でなければならないことがわかる。 $\gamma > 1$ であるので、これは Ω が分散(17)が示唆するギャップ内に常に存在しなければならない事実を表してる。

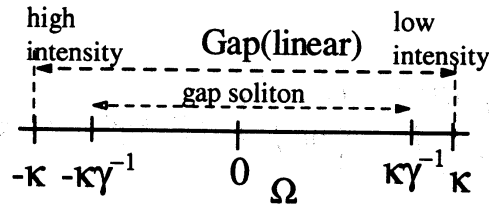


Figure 2:

これが、ギャプソリトンと呼ばれる所以である。そもそも、線形の範囲では許されなかった振動数が、非線形効果によって実現されるのは非常に興味深い事実である。

4 Water Waves

4.1 基礎方程式と線形解析

イントロダクションでも述べたが、結合モードの概念は光系以外にも多くの非線形周期波動系で通用するものであると考えられる。ここでは、Figure3で示された、底に周期構造をもつ水面波系を例として結合モード方程式の拡張を試みる。

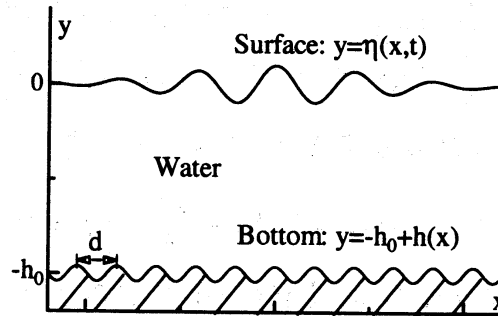


Figure 3:

まず、基礎となる方程式を与える。

○Velocity potential $\Phi(x, y, t)$:

(Incompressible, Irrotational, Lossless Fluid)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (28)$$

○Boundary condition at the bottom: $(y = -h_0 + h(x))$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dh(x)}{dx}, \quad (\text{at } y = -h_0 + h(x)). \quad (29)$$

○Free boundary on the water surface:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (\text{at } y = \eta(x, t)). \quad (30)$$

○Euler equation:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} + g\eta = 0, \quad (\text{at } y = \eta(x, t)). \quad (31)$$

○Periodic bottom:

$$h(x+d) = h(x) = -h_0 \sum_{j \neq 0}^{\infty} h_j e^{2ik_B j x}, \quad (h_{-j} = h_j^*, \quad k_B = \frac{\pi}{d}) \quad (32)$$

ここで底の周期的変動は小さいと仮定する。 $1 \gg h_j \sim O(\varepsilon)$: また、 g は重力加速度である。

以上が出発となる式の全てであるが、まずは非線形性を無視して考える。底が平らな $h(x) = 0$ 場合は、次のような平面波解と分散関係が知られている。

$$\eta(x, t) = A\omega/g \cosh(kh_0) \cos(kx - \omega t), \quad (33)$$

$$\Phi(x, y, t) = -A \cosh(k(y + h_0)) \sin(kx - \omega t). \quad (34)$$

$$\omega^2 = gk \tanh(kh_0) \quad (\text{dispersion relation}) \quad (35)$$

次に、周期構造の影響を考えるわけだが、前セクションの (14) を参照に $\Phi(x, y, t)$ と $\eta(x, t)$ を以下のように展開する。

$$\Phi(x, y, t) = (\phi_+(x, y, t)e^{i(k_B x - \omega t)} + \phi_-(x, y, t)e^{i(-k_B x - \omega t)}) + \text{c.c.}, \quad (36)$$

$$\eta(x, t) = (\eta_+(x, t)e^{i(k_B x - \omega t)} + \eta_-(x, t)e^{i(-k_B x - \omega t)}) + \text{c.c.} \quad (37)$$

ここで $\phi_{\pm}(x, t)$, $\eta_{\pm}(x, y, t)$ は包絡波を表している。まず、Euler 方程式 (31) から

$$g\eta_{\pm} = i\omega\phi_{\pm} - \frac{\partial \phi_{\pm}}{\partial t} \quad (y = 0) \quad (38)$$

を得る。これは ϕ_{\pm} がわかれば η_{\pm} も自動的に求まるという式である。さらに Φ のラプラス方程式 (28) と底での境界条件 (29) から、 ϕ_{\pm} の y の依存性が次のように求まる。

$$\phi_{\pm}(x, y, t) = A_{\pm}(x, t) \cosh k_B(h_0 + y) + \left(\mp i \frac{\partial A_{\pm}}{\partial x} (y + h_0) + k_B h_{\pm} A_{\mp} \right) \sinh k_B(y + h_0). \quad (39)$$

未知関数 $A_{\pm}(x, t)$ は水面波の自由境界条件 (30) から、以下の式を満たすことがわかる。

$$i \left(\frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) A_+ + \kappa_+ A_- = 0, \quad (40)$$

$$i \left(\frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) A_- + \kappa_- A_+ = 0, \quad (41)$$

$$\kappa_{\pm} = - \frac{\omega k_B h_0 h_{\pm 1}}{2v_g \cosh(k_B h_0) \sinh(k_B h_0)}. \quad (42)$$

ただし、 v_g は $k = k_B$ における、分散式 (35) の群速度 $d\omega/dk$ である。(40), (41) は先に求めた (15) と (16) と形の上では全く一致する。従って、同様のギャップが存在することもわかる。

4.2 非線形解析

水面波場合の2次の非線形もあるので、解析法も大きく異なる。Figure4 からわかるように、複数の波が励起されることを考えて、速度ポテンシャル Φ を展開する。

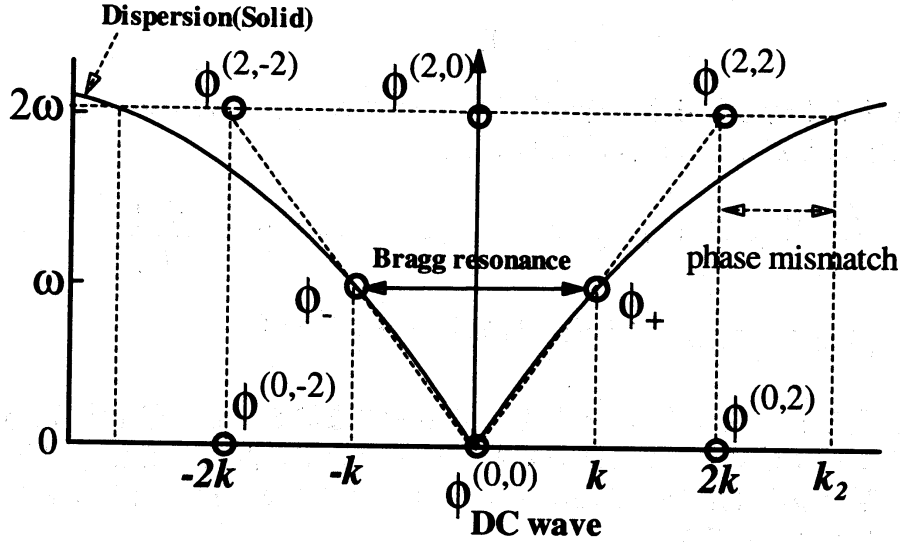


Figure 4:

以下混乱がないと考えられるので $k_B \rightarrow k$ と書き直す。

$$\Phi = (\phi_+ e^{ikz} + \phi_- e^{-ikz}) e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \\ + \phi^{(0,0)} + \phi^{(0,2)} e^{2ikz} + \phi^{(0,-2)} e^{-2ikz} + (\phi^{(2,0)} + \phi^{(2,2)} e^{2ikz} + \phi^{(2,-2)} e^{-2ikz}) e^{-2i\omega t} + \text{c.c.}$$

ここで2行目の量非線形補正項で、1行目に比べ微小と仮定する。 $\eta(x, t)$ についても同様に展開する。まず、ラプラス方程式と底のでの境界条件より、 $\phi_{\pm}(x, y, t)$ に対しては(39)と同じ式

$$\phi_{\pm}(x, y, t) = A_{\pm}(x, t) \cosh k_B(h_0 + y) + \left(\mp i \frac{\partial A_{\pm}}{\partial x} (y + h_0) + k_B h_{\pm} A_{\mp} \right) \sinh k_B(y + h_0)$$

が導かれる。また、 $\phi^{(0,\pm 2)}, \phi^{(2,\pm 2)}$ に関しては

$$\phi^{(l,\pm 2)}(x, y) = A^{(l,\pm 2)}(x, t) \cosh 2k(y + h_0), \quad l = 0, 2$$

なる y 依存性がわかる。 $\phi^{(2,0)}$ は y に依存しない、つまり x と t のみの関数であることがわかり、最後に $\phi^{(0,0)}$ は

$$\phi^{(0,0)}(x, y, t) = D(x, t) - \frac{1}{2}(y^2 + 2yh_0) \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}$$

となる。

次に非線形効果を考えるわけだが、 $y = \eta(x, t)$ での値は例えば

$$\frac{\partial \Phi(x, \eta(x, t), t)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi(x, 0, t)}{\partial t} + \eta(x, t) \frac{\partial^2 \Phi(x, 0, t)}{\partial t \partial y} + \frac{1}{2}(\eta(x, t))^2 \frac{\partial^3 \Phi(x, 0, t)}{\partial t \partial y^2} + \dots (43)$$

のようなテイラー展開を採用する。

以上の準備で主に $A_{\pm}, A^{(l,m)}$ に焦点を当てて、(30) と (31) を計算する。途中

$$A^{(2,\pm 2)} \propto (A_{\pm})^2 (\text{second harmonics}) \quad (44)$$

$$A^{(2,0)} \propto A_+ A_- \quad (45)$$

$$A^{(0,\pm 2)} \propto A_{\pm} A_{\pm}^* \quad (46)$$

といった関係式が得られるが、定常的な波に関する $D(x, t)$ は上のように A_{\pm} を用いてあらわに表すことができない。結果的には、

$$i \left(\frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x} \right) A_{\pm} + \kappa A_{\mp} + \left\{ a|A_{\pm}|^2 + b|A_{\mp}|^2 + c \frac{\partial D}{\partial t} \right\} A_{\pm} = 0, \quad (47)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) D + d \frac{\partial}{\partial x} (|A_+|^2 + |A_-|^2) = 0. \quad (48)$$

となり、進行波 A_+ 、後退波 A_- とともに D も独立な波動として登場する。 a, b, c, d は実定数だがここでは明示することは割愛する。 $\phi^{(0,0)}$ は DC 波（直流波）と呼ばれて、DC 波による影響を整流作用 (rectification) と言う。ここでは、 $D(x, t)$ についても DC 波と呼んで、差し支えないであろう。

前セクションと同様に定常進行波解を仮定する。

$$A_{\pm}(x, t) = \Delta^{\pm \frac{1}{2}} \sqrt{F(\zeta)} e^{i(\theta_{\pm}(\zeta) - v_g \Omega t)}, \quad (49)$$

$$D(x, t) = D(\zeta), \quad (50)$$

$$\zeta = x - Vt, \quad (51)$$

すると (48) より直ちに

$$\frac{dD}{d\zeta} = -\frac{v_0^2 d}{(v_0^2 - V^2)} \left(\Delta + \frac{1}{\Delta} \right) F(\zeta) \quad (52)$$

となり、いかは前セクションと同様にギャップソリトン解を導くことができる。

DC 波と進行後退ブラッグ波の相互作用は、2 次の非線形光学系においても存在することが知られており、似た形の方程式が得られている。[7] これらの整流効果は、変調不安定性、ソリトンの安定性を含めまだまだ課題多く、今後の今後の研究の期待される。

References

- [1] キッテル固体物理学入門 (上) p193 C.Kittel 第7版訳書 丸善(株)(1998)
- [2] 非線形光ファイバー光学第2版 p502 G.P.Agrawal 訳書 吉岡書店 (1997)
- [3] W. Chen and D. L. Mills, Phys. Rev. Lett. **58**, 160 (1987).
D. L. Mills and S.E. Trullinger, Phys. Rev. B **36**, 947 (1987); D. N. Christodoulides and R. I. Joseph, Phys. Rev. Lett. **62**, 1746 (1989),
A.B. Aceves and S. Wabnitz, Phys. Lett. A **141**, 37 (1989).

- [4] B.J. Eggleton, R.E. Slusher, C.M. de Sterke, P.A. Krug, and J.E. Sipe, Phys. Rev. Lett. **76**, 1627 (1996) D. Taverner N. G.R. Broderick, D.J. Richardson, R.I. Laming, and M. Ibsen, Opt. Lett. **23**, 328 (1998); B.J. Eggleton, C.M. de Sterke, and R.E. Slusher, J. Opt. Soc. Am. B. **16**, 587 (1999).
- [5] 田中俊一、伊達悦朗 「KdV 方程式－非線型数理物理入門」 紀伊國屋書店 (1979).
- [6] T.Iizuka and M.deSterke: Phys.Rev.E **61**No.4,4491-4499,(2000)
- [7] T.Iizuka and Y.S.Kivshar:Phys.Rev.E **59**No.6,7148-7151(1999)